

# WYKŁAD 3

## Wstęp do optyki i fizyki materii skondensowanej

Optyka

Mariusz Semczuk

[msemczuk@fuw.edu.pl](mailto:msemczuk@fuw.edu.pl)

Fizyka materii skondensowanej:

Johannes Binder

# Odziaływanie atomu z polem E-M

## Przybliżenie półklasyczne

Operator oddziaływania:  $\hat{V}(t) = e\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\mathcal{E}}(t)$   $\longrightarrow$   $\hat{V}(t) = ex\mathcal{E}_0 \cos \omega t$

Pole wzdłuż x:  $\boldsymbol{\mathcal{E}}(t) = (\mathcal{E}_0, 0, 0) \cos \omega t$   $= \frac{ex\mathcal{E}_0}{2} (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t})$

$$V_{ij}(t) = \frac{e\mathcal{E}_0}{2} (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}) \int \psi_i^* x \psi_j d^3\mathbf{r}$$

Elementy macierzy  
Przejścia dipolowego

$$\mu_{ij} = -e \int \psi_i^* x \psi_j d^3\mathbf{r} \equiv -e \langle i|x|j \rangle$$

$$V_{ij}(t) = -\frac{\mathcal{E}_0}{2} (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}) \mu_{ij}$$

$$\mu_{11} = \mu_{22} = 0.$$

$$\mu_{21} = \mu_{12}$$

$$\mu_{21} = \mu_{12}^*$$

$$\Omega_R = |\mu_{12}\mathcal{E}_0/\hbar|$$

$$\dot{c}_1(t) = i \frac{\mathcal{E}_0 \mu_{12}}{2\hbar} \left( e^{i(\omega-\omega_0)t} + e^{-i(\omega+\omega_0)t} \right) c_2(t)$$

$$\dot{c}_2(t) = i \frac{\mathcal{E}_0 \mu_{12}}{2\hbar} \left( e^{-i(\omega-\omega_0)t} + e^{i(\omega+\omega_0)t} \right) c_1(t)$$

$$\dot{c}_1(t) = \frac{i}{2} \Omega_R \left( e^{i(\omega-\omega_0)t} + e^{-i(\omega+\omega_0)t} \right) c_2(t)$$

$$\dot{c}_2(t) = \frac{i}{2} \Omega_R \left( e^{-i(\omega-\omega_0)t} + e^{i(\omega+\omega_0)t} \right) c_1(t)$$

# Odziaływanie atomu z polem E-M

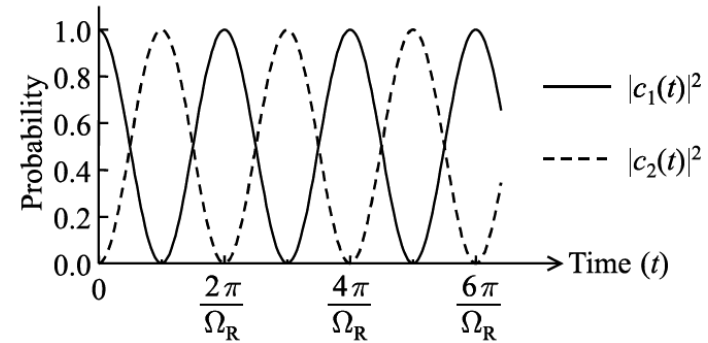
## Oscylacje Rabiego

W przybliżeniu wirującej fali:  
(w rezonansie)

$$\dot{c}_1(t) = \frac{i}{2} \Omega_R c_2(t)$$

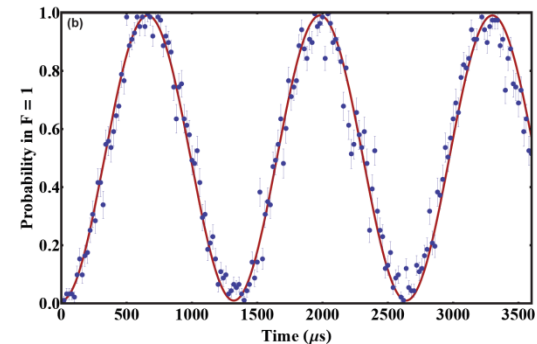
$$\dot{c}_2(t) = \frac{i}{2} \Omega_R c_1(t)$$

$$\ddot{c}_1 = \frac{i}{2} \Omega_R \dot{c}_2 = \left( \frac{i}{2} \Omega_R \right)^2 c_1 \quad \ddot{c}_1 + \left( \frac{\Omega_R}{2} \right)^2 c_1 = 0$$



Oscylacje Rabiego  
(Rabi oscillations, Rabi flopping)

$$\begin{aligned} |c_1(t)|^2 &= \cos^2(\Omega_R t/2) \\ |c_2(t)|^2 &= \sin^2(\Omega_R t/2) \end{aligned}$$



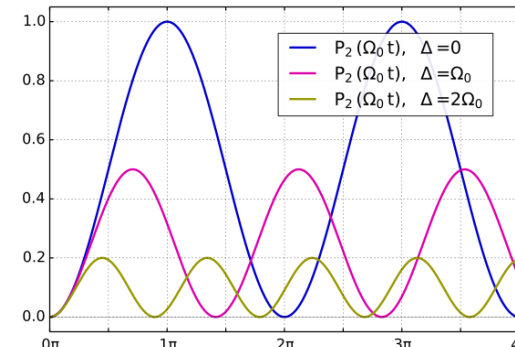
Z odstrojeniem od rezonansu:

$$|c_2(t)|^2 = \frac{\Omega_R^2}{\Omega^2} \sin^2(\Omega t/2)$$

$$\Omega^2 = \Omega_R^2 + \delta\omega^2$$

Pole impulsu:

$$\Theta = \left| \frac{\mu_{12}}{\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{E}_0(t) dt \right|$$



# Odziaływanie atomu z polem E-M

## Oscylacje Rabi'ego z tłumieniem

$$|c_2(t)|^2 = \frac{1}{2(1 + 2\xi^2)} \left[ 1 - \left( \cos \Omega't + \frac{3\xi}{(4 - \xi^2)^{1/2}} \sin \Omega't \right) \exp\left(-\frac{3\gamma t}{2}\right) \right]$$

$$\xi = \gamma/\Omega_R \quad \Omega' = \Omega_R \sqrt{1 - \xi^2/4}$$

Oscylacje dla  $\Omega_R \equiv |\mu_{12}\mathcal{E}_0/\hbar| \gg \gamma$

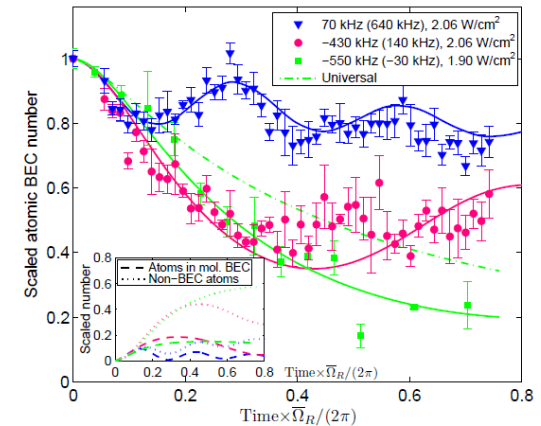
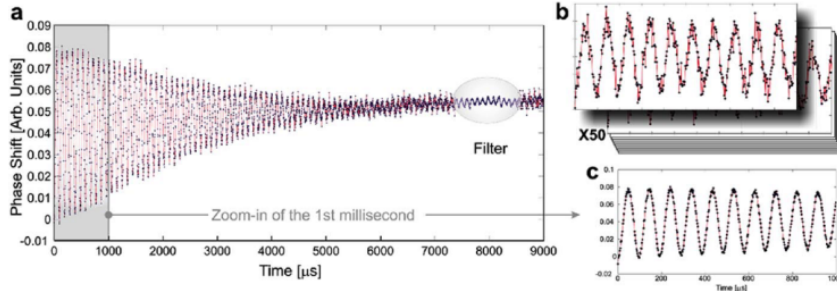
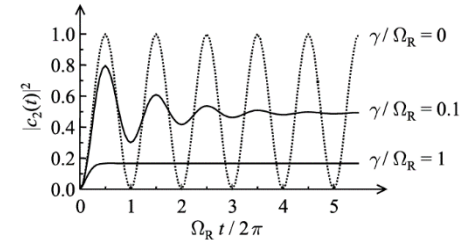


FIG. 4: (color online). Number of BEC atoms versus time. The number is scaled to the number with no PA ( $\nabla$ :8800,  $\circ$ :8800,  $\square$ :6700) and time is scaled to the inverse Rabi frequency for average density,  $\bar{n} = n_{\text{peak}}/\sqrt{8}$ ,  $2\pi/\bar{\Omega}_R = (\nabla:7.1, \circ:7.1, \square:10.5) \mu\text{s}$ . The legend states the detuning with respect to PA resonance at low intensity and (in parentheses) the detuning with respect to the long-time resonance position including ac Stark shift, followed by the intensity. Rabi oscillations are clearest for large blue detuning from the ac-Stark-shifted resonance ( $\nabla$ ). Solid lines are predictions of Eqs. 1 for  $l_{\text{opt}}/l = 5000 a_0/(\text{W}/\text{cm}^2)$  and peak density at the upper limit of the measurement uncertainty. The universal prediction (dash-dotted line) is given by Eq. (9) in Ref. [8]. The inset shows the calculated population of atoms in the excited-state molecular BEC and ground-state atoms in non-condensate modes.

FIG. 3 (color online). Purified sample of atoms (a) Rabi cycling on the clock transition recorded using  $0.2 \mu\text{s}$  probe pulses with a repetition period of  $2.3 \mu\text{s}$ . Oscillations are still visible after a time of 8 ms (a running average filter over 8 pulses has been included at this point of time to enhance the oscillations) corresponding to having applied  $\sim 3500$  probe pulses. The trace is an average of 50 realizations of the experiment. (b) A single experiment recording of Rabi oscillations during the first millisecond. (c) A zoom-in on the first millisecond of the trace in (a), i.e., an average of 50 traces as shown in (b). At time 0 ms the phase shift is zero as a result of all the atoms being transferred to the ( $F = 3, m_F = 0$ ) clock state and the probe only being sensitive to atoms in the  $F = 4$  states.

# Model Jaynesa – Cummingsa

Pola elektryczne i magnetyczne można zapisać jako

$$\hat{E}_x(z, t) = E_0[\hat{a}(t) + \hat{a}^\dagger(t)] \sin(kz)$$

$$\hat{B}_y(z, t) = E_0[\hat{a}(t) - \hat{a}^\dagger(t)] \cos(kz)$$

Hamiltonian opisujący pole można zapisać zaś jako

$$\hat{H} = \hat{H}_{\text{field}} = \hbar\omega_c \left[ \hat{a}(t)\hat{a}^\dagger(t) + \frac{1}{2} \right] \approx \hbar\omega_c \hat{a}(t)\hat{a}^\dagger(t) = \hbar\omega_c \hat{a}\hat{a}^\dagger$$

# Model Jaynesa – Cummingsa

Weźmy dwa rozważane poziomy w atomie

$$|g\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad |e\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Hamiltonian atom można zapisać zaś jako

$$\begin{aligned} \hat{H} &= E_g |g\rangle \langle g| + E_e |e\rangle \langle e| = \begin{pmatrix} E_e & 0 \\ 0 & E_g \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} E_g + E_e & 0 \\ 0 & E_g + E_e \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} E_e - E_g & 0 \\ 0 & -(E_e - E_g) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}(E_g + E_e)\hat{\mathbf{1}} + \frac{1}{2}(E_e - E_g)\hat{\sigma}_z \\ &\hat{H} = \hat{H}_{\text{atom}} = \frac{1}{2}\hbar\omega_a\hat{\sigma}_z \end{aligned}$$

# Model Jaynesa – Cummingsa

Zaczynamy od hamiltonianu  $\hat{H} = -\hat{\mu} \cdot \hat{\mathbf{E}}$

$$\begin{aligned}\hat{H}_{\text{int}} &= -\hat{\mu} \cdot E_0(\hat{a} + \hat{a}^\dagger) \sin(kz)\hat{\mathbf{x}} \\ &= \lambda\hat{\mu}(\hat{a} + \hat{a}^\dagger)\end{aligned}$$

gdzie  $\lambda = -\sqrt{\frac{\hbar\omega_c}{\epsilon_0 V}} \sin(kz)$ .

Macierze Pauliego:

$$\hat{\sigma}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \hat{\sigma}_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \hat{\sigma}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\hat{\sigma}_+ = \hat{\sigma}_1 + i\hat{\sigma}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \hat{\sigma}_- = \hat{\sigma}_1 - i\hat{\sigma}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

# Hamiltonian oddziaływania

Wiemy, że  $\langle g|\hat{\mu}|g\rangle = 0$  i  $\langle e|\hat{\mu}|e\rangle = 0$  ze względu na parzystość.  
Rozwijając  $\hat{\mu}$  w bazie stanów  $\{|g\rangle, |e\rangle\}$  otrzymujemy

$$\hat{\mu} = \mu |g\rangle \langle e| + \mu^* |e\rangle \langle g| = \mu\hat{\sigma}_- + \mu\hat{\sigma}_+ = \mu(\sigma_- + \sigma_+)$$

przy czym bez straty ogólności założyliśmy, że  $\mu = \mu_{ge} = \langle g|\hat{\mu}|e\rangle$  jest rzeczywiste.

A zatem oddziaływanie może być zapisane jako

$$\hat{H}_{\text{int}} = \hbar\Omega(\hat{\sigma}_+ + \hat{\sigma}_-)(\hat{a} + \hat{a}^\dagger)$$

gdzie

$$\Omega = -\frac{\mu}{\hbar} \sqrt{\frac{\hbar\omega_c}{\epsilon_0 V}} \sin(kz)$$



# Hamiltonian oddziaływania

w obrazie oddziaływania ewolucja czasowa operatorów jest następująca

$$\hat{a}(t) = \hat{a}(0)e^{-i\omega_c t} \quad \hat{a}^\dagger(t) = \hat{a}^\dagger(0)e^{i\omega_c t}$$

$$\hat{\sigma}_\pm = \hat{\sigma}_\pm(0)e^{\pm i\omega_a t}$$

Hamiltonian przyjmuje wtedy postać

$$\begin{aligned} \hat{H}_{\text{int}} &= \hbar\Omega(\hat{\sigma}_+\hat{a} + \hat{\sigma}_+\hat{a}^\dagger + \hat{\sigma}_-\hat{a} + \hat{\sigma}_-\hat{a}^\dagger) \\ &= \hbar\Omega(\hat{\sigma}_+\hat{a}e^{i(\omega_a-\omega_c)t} + \hat{\sigma}_+\hat{a}^\dagger e^{i(\omega_a+\omega_c)t} \\ &\quad + \hat{\sigma}_-\hat{a}e^{-i(\omega_a+\omega_c)t} + \hat{\sigma}_-\hat{a}^\dagger e^{-i(\omega_a-\omega_c)t}) \end{aligned}$$

Człony  $\hat{\sigma}_+\hat{a}^\dagger$  i  $\hat{\sigma}_-\hat{a}$  zmieniają się w czasie dużo szybciej niż pozostałe człony, stosujemy więc przybliżenie fali wirującej i dzięki temu się ich pozbywamy. Dodatkowo, człony te są niefizyczne.

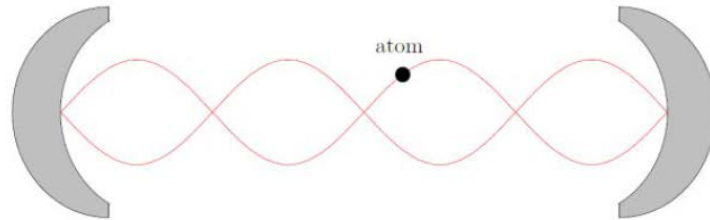
# Hamiltonian oddziaływania

otrzymujemy hamiltonian oddziaływania w następującej formie

$$\hat{H}_{\text{int}} = \hbar\Omega(\hat{\sigma}_+\hat{a} + \hat{\sigma}_-\hat{a}^\dagger)$$

Hamiltonian Jaynesa-Cummingsa ma zatem następującą postać

$$\hat{H}_{\text{JC}} = \hbar\omega_c\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\hbar\omega_a\hat{\sigma}_z + \hbar\Omega(\hat{\sigma}_+\hat{a} + \hat{\sigma}_-\hat{a}^\dagger)$$



# Oscylacje Rabiego próżni

Hamiltonian J-C można zapisać jako sumę dwóch części

$$\hat{H}_{\text{JC}} = \hat{H}_{\text{I}} + \hat{H}_{\text{II}}$$

gdzie

$$\hat{H}_{\text{I}} = \hbar\omega_c \hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \hbar\omega_a \hat{\sigma}_z$$

$$\hat{H}_{\text{II}} = \hbar\Omega (\hat{\sigma}_+ \hat{a} + \hat{\sigma}_- \hat{a}^\dagger)$$

$$\text{i } [\hat{H}_{\text{I}}, \hat{H}_{\text{II}}] = 0.$$

Całą dynamikę zawiera człon  $\hat{H}_{\text{II}}$ .

Niech stanem podstawowym układu pole-atom będzie  $|i\rangle = |e, n\rangle$  a stanem końcowym  $|f\rangle = |g, n+1\rangle$ . Wektor stanu to

$$|\psi(t)\rangle = C_i |i\rangle + C_f |f\rangle$$

# Oscylacje Rabiego próżni

Równanie Schroedingera w obrazie oddziaływania

$$i\hbar \frac{d|\psi(t)\rangle}{dt} = \hat{H}_{\text{II}} |\psi(t)\rangle$$

Możemy zapisać równania różniczkowe na współczynniki

$$\dot{C}_i = -i\Omega\sqrt{n+1}C_f$$

$$\dot{C}_f = -i\Omega\sqrt{n+1}C_i$$

$$\ddot{C}_i + \Omega^2(n+1)C_i = 0$$

Ustalmy warunki początkowe jako  $C_i(0) = 1$  and  $C_f(0) = 0$ .

# Oscylacje Rabiego próżni

Rozwiązując otrzymane równania możemy wyznaczyć współczynniki

$$C_i(t) = \cos\left(\Omega t \sqrt{n+1}\right)$$

$$C_f(t) = -i \sin\left(\Omega t \sqrt{n+1}\right)$$

Pełne rozwiązanie

$$|\psi(t)\rangle = \cos\left(\Omega t \sqrt{n+1}\right) |e, n\rangle - i \sin\left(\Omega t \sqrt{n+1}\right) |g, n+1\rangle$$

Prawdopodobieństwo, że układ pozostanie w stanie podstawowym

$$P_i(t) = |C_i(t)|^2 = \cos^2\left(\Omega t \sqrt{n+1}\right)$$

podczas gdy prawdopodobieństwo przejścia do stanu wzbudzonego

$$P_f(t) = |C_f(t)|^2 = \sin^2\left(\Omega t \sqrt{n+1}\right)$$

# Oscylacje Rabiego próżni

Inwersja populacji jest dana równaniem

$$W(t) = P_i(t) - P_f(t) = \cos\left(2\Omega t\sqrt{n+1}\right)$$

Powyższe opisuje oscylacje Rabiego z częstotliwością  $\omega(n) = 2\Omega\sqrt{n+1}$ .

Można zauważyć, że nawet przy braku światła, tj.  $n = 0$ , prawdopodobieństwo przejścia jest niezerowe

$$W(t)|_{n=0} = \cos(2\Omega t)$$

Oscylacje Rabiego próżni są efektem czysto kwantowomechanicznym i wynikają z faktu, że atom spontanicznie emituje foton a następnie go absorbuje itd.