

WYKŁAD 2

Wstęp do optyki i fizyki materii skondensowanej

Optyka

Mariusz Semczuk

msemczuk@fuw.edu.pl

Fizyka materii skondensowanej:

Johannes Binder

Kwantowanie pola: pole jednomodowe

$$\hat{\mathcal{H}} = \frac{1}{2}(\omega^2 \hat{q}^2 + \hat{p}^2)$$

$$\begin{array}{l} \hat{a} = \sqrt{\frac{1}{2\hbar\omega}} (\omega\hat{q} + i\hat{p}) \\ \hat{a}^\dagger = \sqrt{\frac{1}{2\hbar\omega}} (\omega\hat{q} - i\hat{p}) \end{array} \quad \begin{array}{l} \hat{q} = \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega}} (\hat{a} + \hat{a}^\dagger) \\ \hat{p} = -i\sqrt{\frac{\hbar\omega}{2}} (\hat{a} - \hat{a}^\dagger) \end{array}$$

$$\hat{\mathcal{H}} = \hbar\omega \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right)$$

$$\hat{E}_x(z, t) = \sqrt{\frac{\hbar\omega}{\epsilon_0 L}} (\hat{a} + \hat{a}^\dagger) \sin kz,$$

$$\hat{B}_y(z, t) = -i \frac{1}{c} \sqrt{\frac{\hbar\omega}{\epsilon_0 L}} (\hat{a} - \hat{a}^\dagger) \cos kz$$

$$\hat{a}^\dagger(t) = \hat{a}^\dagger(0) \exp(i\omega t)$$

$$\hat{a}(t) = \hat{a}(0) \exp(-i\omega t)$$

$$\longleftarrow \frac{d}{dt} \hat{a} = \frac{i}{\hbar} [\hat{\mathcal{H}}, \hat{a}]$$

Kwantowanie pola: pole wielomodowe

$$\hat{\mathcal{H}} = \sum_k \hbar\omega_k (\hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k + 1/2)$$

$$\begin{aligned} \hat{q}_k &= \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega}} [\hat{a}_k^\dagger + \hat{a}_k] & \hat{a}_k &= \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega}} [\omega_k \hat{q}_k + i\hat{p}_k] \\ \hat{p}_k &= i\sqrt{\frac{\hbar\omega}{2}} [\hat{a}_k^\dagger - \hat{a}_k] & \hat{a}_k^\dagger &= \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega}} [\omega_k \hat{q}_k - i\hat{p}_k] \end{aligned}$$

$$\hat{\mathcal{H}} = \sum_k \hbar\omega_k \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k + \text{“}\infty\text{”}$$

Skwantowane pole E-M

Rezonator o boku L, fale stojące

Pole elektryczne $\hat{E}_x(z, t) = \sqrt{\frac{\hbar\omega}{\epsilon_0 L}} (\hat{a} + \hat{a}^\dagger) \sin kz,$

Pole magnetyczne $\hat{B}_y(z, t) = -i \frac{1}{c} \sqrt{\frac{\hbar\omega}{\epsilon_0 L}} (\hat{a} - \hat{a}^\dagger) \cos kz$

Fale płaskie w wolnej przestrzeni, sześcian o boku L

$$\hat{E}_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}, t) = i \sqrt{\frac{\hbar\omega_{\mathbf{k}}}{2\epsilon_0 V}} \mathbf{e}_{\mathbf{k}} \left\{ \hat{a}_{\mathbf{k}} \exp[-i(\omega_{\mathbf{k}}t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})] - \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \exp[i(\omega_{\mathbf{k}}t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})] \right\}$$

$$\hat{B}_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}, t) = i \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0 V \omega_{\mathbf{k}}}} \mathbf{k} \times \mathbf{e}_{\mathbf{k}} \left\{ \hat{a}_{\mathbf{k}} \exp[-i(\omega_{\mathbf{k}}t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})] - \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \exp[i(\omega_{\mathbf{k}}t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})] \right\}$$

Pole elektryczne jednomodowe, określona polaryzacja

$$\begin{aligned} \hat{E}(\mathbf{r}, t) &= i \mathcal{E}_0 \left(\hat{a} e^{-i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} - \hat{a}^\dagger e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} \right) \\ &= \mathcal{E}_0 \left(\hat{a} e^{-i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \frac{\pi}{2})} + \hat{a}^\dagger e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \frac{\pi}{2})} \right) \\ \mathcal{E}_0 &= \sqrt{\hbar\omega / (2\epsilon_0 V)} \end{aligned}$$

Fluktuacje kwantowe pola

Pole elektryczne $\hat{E}_x(z, t) = \sqrt{\frac{\hbar\omega}{\epsilon_0 L}} (\hat{a} + \hat{a}^\dagger) \sin kz,$

Pole magnetyczne $\hat{B}_y(z, t) = -i \frac{1}{c} \sqrt{\frac{\hbar\omega}{\epsilon_0 L}} (\hat{a} - \hat{a}^\dagger) \cos kz$

$$\langle n | \hat{E}_x(z, t) | n \rangle = \mathcal{E} \sin kz \langle n | (\hat{a} + \hat{a}^\dagger) | n \rangle = 0 \quad \mathcal{E} = \sqrt{\hbar\omega/\epsilon_0 L}$$

$$\begin{aligned} \langle n | \hat{E}_x^2(z, t) | n \rangle &= \mathcal{E}^2 \sin^2 kz \langle n | (\hat{a} + \hat{a}^\dagger)^2 | n \rangle = \mathcal{E}^2 \sin^2 kz \langle n | (\hat{a}^2 + (\hat{a}^\dagger)^2 + \hat{a}\hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger\hat{a}) | n \rangle \\ &= 2\mathcal{E}^2 \left(n + \frac{1}{2} \right) \sin^2 kz. \end{aligned}$$

$$\Delta E = \sqrt{\langle E^2 \rangle - \langle E \rangle^2} = \sqrt{2} \mathcal{E} \sqrt{n + \frac{1}{2}} |\sin kz|$$

$$\Delta E_{\text{vac}} = \mathcal{E} |\sin kz|$$

Fluktuacje kwantowe pola

Operatory pola \hat{E} i \hat{B} nie komutują ze sobą ani z operatorem liczby fotonów, \hat{n}

$$[\hat{n}, \hat{E}_x] = -\mathcal{E} \sin kz (\hat{a} - \hat{a}^\dagger)$$

Emisja spontaniczna (współczynnik Einsteina A) jako efekt fluktuacji próżni:
na wykładach/ćwiczeniach poświęconych atomom

Kwantowe stany pola elektromagnetycznego

Stany Foka (ang. Fock states, number state) [bozonowe]:

stany własne operatora liczby obsadzeń \hat{n}_k i hamiltonianu $\hat{\mathcal{H}} = \sum_k \hbar\omega_k (\hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k + 1/2)$

$$\hat{n}_k |n_k\rangle = n_k |n_k\rangle$$

$$|n_k\rangle = \frac{(\hat{a}_k^\dagger)^{n_k}}{\sqrt{n_k!}} |0_k\rangle$$

$$\sum_{n_k=0}^{\infty} |n_k\rangle \langle n_k| = \hat{1}_k$$

$$\langle n_k | m_k \rangle = \delta_{nm}$$

Stan próżni

$$|\Omega\rangle = \prod_k |0_k\rangle = |0_1\rangle \otimes \dots \otimes |0_k\rangle \otimes \dots$$

Uporządkowanie normalne operatorów:

funkcja od operatorów kreacji stoi na lewo od funkcji od operatorów a anihilacji.

Kwantowe stany pola elektromagnetycznego

Stany koherentne w laserze

Dla pola jednomodowego $H_0 + (\mathcal{E}\mathbf{e}\cdot\mathbf{P}_0)(\hat{a} + \hat{a}^\dagger)(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t})$

Dla $t=0$ pole jest w stanie podstawowym $|0\rangle$ oraz $\hat{a} \rightarrow \hat{a}e^{-i\omega t}$

$$i\hbar \frac{d|\psi\rangle}{dt} = \hat{H}_{\text{int}}|\psi\rangle$$

$$\hat{H}_{\text{int}} \approx (\mathcal{E}\mathbf{e}\cdot\mathbf{P}_0)(\hat{a} + \hat{a}^\dagger)$$

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &= e^{-\frac{i\mathcal{E}\mathbf{e}\cdot\mathbf{P}_0}{\hbar}t(\hat{a}+\hat{a}^\dagger)}|0\rangle \\ &\equiv e^{-\alpha^*\hat{a}+\alpha\hat{a}^\dagger}|0\rangle \quad \alpha = -\frac{it\mathcal{E}\mathbf{e}\cdot\mathbf{P}_0}{\hbar} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow |\psi\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} e^{\alpha\hat{a}^\dagger}|0\rangle$$

Kwantowe stany pola elektromagnetycznego

Stany koherentne (ang. coherent states)
[np. deterministyczne źródło prądu, laser]

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle$$

$$\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$$

$$\langle n|\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha\langle n|\alpha\rangle$$

$$\langle n|\hat{a} = (\hat{a}^\dagger|n\rangle)^\dagger = (\sqrt{n+1}|n+1\rangle)^\dagger = \sqrt{n+1}\langle n+1|$$

$$\langle n+1|\alpha\rangle = \frac{\alpha}{\sqrt{n+1}} \langle n|\alpha\rangle$$

Współczynniki rozwinięcia
stanu koherentnego
w bazie stanów Focka

$$\longrightarrow \langle n|\alpha\rangle = \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \langle 0|\alpha\rangle$$

$$|\alpha\rangle = \sum_n |n\rangle \langle n|\alpha\rangle = \langle 0|\alpha\rangle \sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle$$

$$\langle \alpha|\alpha\rangle = |\langle 0|\alpha\rangle|^2 \sum_n \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} = |\langle 0|\alpha\rangle|^2 e^{|\alpha|^2} = 1$$

$$\langle 0|\alpha\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2}$$

$$\alpha = |\alpha|e^{i\varphi}$$

Kwantowe stany pola elektromagnetycznego

Stany koherentne(ang. coherent states)

Nie ortogonalne! Układ przepęłniony (ang. overcomplete)

$$\langle \alpha | \beta \rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2 - \frac{1}{2}|\beta|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^{*n} \beta^n}{n!} = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2 - \frac{1}{2}|\beta|^2 + \alpha^* \beta} \quad |\langle \alpha | \beta \rangle|^2 = e^{-|\alpha - \beta|^2}$$

Prawdopodobieństwo znalezienia n fotonów w stanie $|\alpha\rangle$: rozkład Poissona

$$P_n = |\langle n | \alpha \rangle|^2 = \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} e^{-|\alpha|^2} = \frac{\langle \hat{n} \rangle^n}{n!} e^{-\langle \hat{n} \rangle}$$

$$\langle \hat{n} \rangle = |\alpha|^2$$

$$\Delta n = \sqrt{\langle \hat{n}^2 \rangle - \langle \hat{n} \rangle^2} = |\alpha|$$

$$\frac{\Delta n}{\langle \alpha | \hat{n} | \alpha \rangle} = |\alpha|^{-1}$$

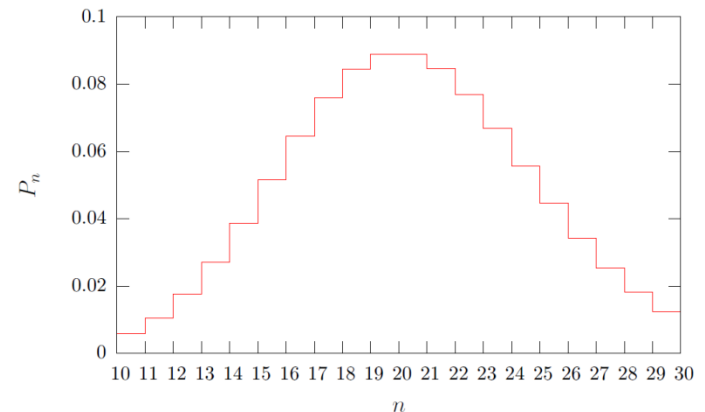
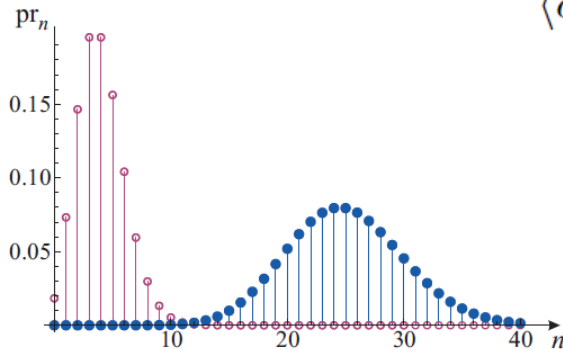


Figure 4.2: the Poisson distribution with $\langle n \rangle = 4$ (empty circles) and $\langle n \rangle = 25$ (filled circles).

Rysunek 5.1. Rozkład Poissona ze średnią liczbą fotonów równą $|\alpha|^2 = 20$

Kwantowe stany pola elektromagnetycznego

Stany koherentne(ang. coherent states)

Operator przesunięcia
(ang. displacement operator)

$$\hat{D}(\alpha) \equiv e^{(\alpha \hat{a}^\dagger - \alpha^* \hat{a})}$$

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha \hat{a}^\dagger)^n}{n!} |0\rangle$$

$$= e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} e^{\alpha \hat{a}^\dagger} |0\rangle$$

$$|n\rangle = \frac{(\hat{a}^\dagger)^n}{\sqrt{n!}} |0\rangle$$

$$e^{-\alpha^* \hat{a}} |0\rangle = \sum_n \frac{(-\alpha^* \hat{a})^n}{n!} |0\rangle = |0\rangle$$

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} e^{\alpha \hat{a}^\dagger} e^{-\alpha^* \hat{a}} |0\rangle = D(\alpha) |0\rangle$$

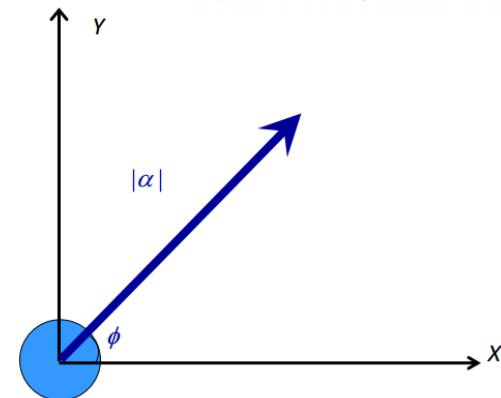
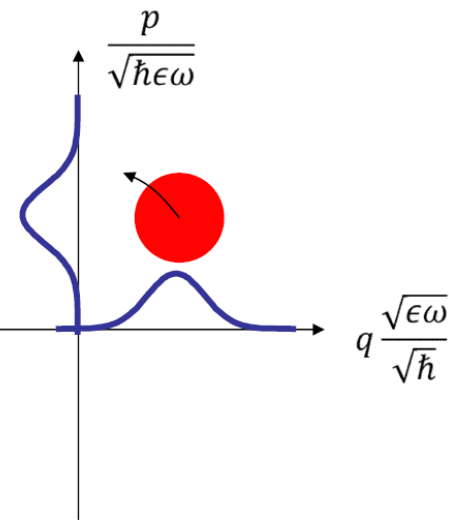
$$D(\alpha) = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} e^{\alpha \hat{a}^\dagger} e^{-\alpha^* \hat{a}}$$

$$D^\dagger(\alpha) = D(-\alpha) = D^{-1}(\alpha)$$

$$D^{-1}(\alpha) \hat{a}^\dagger D(\alpha) = \hat{a}^\dagger + \alpha^*$$

$$D^{-1}(\alpha) \hat{a} D(\alpha) = \hat{a} + \alpha$$

$$\Rightarrow |\psi\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} e^{\alpha \hat{a}^\dagger} |0\rangle$$



Kwantowe stany pola elektromagnetycznego

Stany koherentne(ang. coherent states)

Nieoznaczoność operatora pola elektrycznego:

$$\begin{aligned}\langle \alpha | \hat{E} | \alpha \rangle &= i \sqrt{\frac{\hbar \omega}{2 \epsilon_0 V}} \left\{ \alpha e^{-i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} - \alpha^* e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} \right\} \\ &= 2 \sqrt{\frac{\hbar \omega}{2 \epsilon_0 V}} |\alpha| \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \varphi).\end{aligned}$$

$$\langle \alpha | \hat{E}^2 | \alpha \rangle = \frac{\hbar \omega}{2 \epsilon_0 V} \left\{ 4 |\alpha|^2 \sin^2(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \varphi) + 1 \right\}$$

$$\Delta E = \sqrt{\langle \alpha | \hat{E}^2 | \alpha \rangle - \langle \alpha | \hat{E} | \alpha \rangle^2} = \sqrt{\frac{\hbar \omega}{2 \epsilon_0 V}} = \text{fluktuacje próżni}$$

Kwantowe stany pola elektromagnetycznego

Stany koherentne(ang. coherent states)

Pole elektryczne w kwadraturach

$$\hat{X}_1 = \frac{1}{2}(\hat{a} + \hat{a}^\dagger) \quad \hat{X}_2 = \frac{1}{2i}(\hat{a} - \hat{a}^\dagger)$$

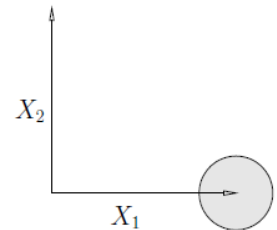
$$\hat{E}(\mathbf{r}, t) = 2\mathcal{E}_0 \left[\hat{X}_1 \cos(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \frac{\pi}{2}) + \hat{X}_2 \sin(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \frac{\pi}{2}) \right]$$

$$\Delta X_1 \Delta X_2 \geq \frac{1}{4}$$

Dla stanu koherentnego: $(\Delta X_1)^2 = (\Delta X_2)^2 = \frac{1}{4}$ czyli $\Delta X_1 \Delta X_2 = \frac{1}{4}$

$$\langle \alpha | \hat{X}_1 | \alpha \rangle = \frac{1}{2}(\alpha + \alpha^*) = \text{Re } \alpha$$

$$\langle \alpha | \hat{X}_2 | \alpha \rangle = \frac{1}{2i}(\alpha - \alpha^*) = \text{Im } \alpha$$



Kwantowe stany pola elektromagnetycznego

Stany termiczne (promieniowanie ciała doskonale czarnego)

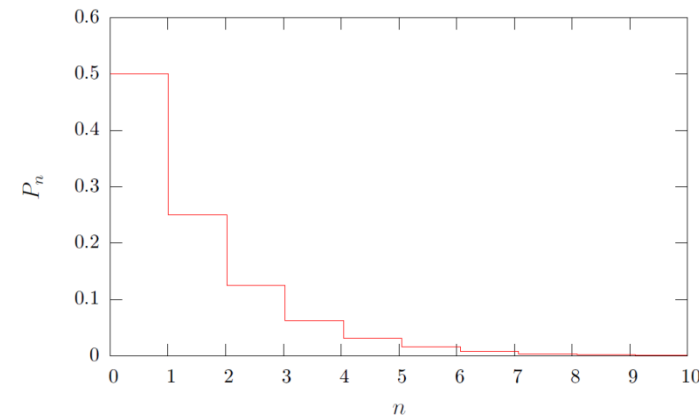
$$\hat{\rho} = \sum_n P_n |n\rangle \langle n|$$

$$P_n = (1 - e^{-\beta\hbar\omega}) e^{-n\beta\hbar\omega}$$

$$\langle \hat{n} \rangle = \text{Tr}(\hat{\rho} \hat{a}^\dagger \hat{a}) = \sum_{n=0}^{\infty} n P_n = \frac{e^{-\beta\hbar\omega}}{1 - e^{-\beta\hbar\omega}} = \frac{1}{e^{\beta\hbar\omega} - 1}$$

$$\hat{\rho} = \frac{1}{\langle \hat{n} \rangle + 1} \sum_n \left(\frac{\langle \hat{n} \rangle}{\langle \hat{n} \rangle + 1} \right)^n |n\rangle \langle n|$$

$$P_n = \frac{1}{\langle \hat{n} \rangle + 1} \left(\frac{\langle \hat{n} \rangle}{\langle \hat{n} \rangle + 1} \right)^n$$



Rysunek 5.2. Rozkład geometryczny dla średniej liczby fotonów równej 1.0

Kwantowe stany pola elektromagnetycznego

Stany termiczne (promieniowanie ciała doskonale czarnego)

Fluktuacje

$$\langle \hat{n} \rangle = \text{Tr}(\hat{\rho} \hat{a}^\dagger \hat{a}) = \sum_{n=0}^{\infty} n P_n = \frac{e^{-\beta \hbar \omega}}{1 - e^{-\beta \hbar \omega}} = \frac{1}{e^{\beta \hbar \omega} - 1}$$

$$\langle \hat{n}^2 \rangle = 2\langle \hat{n} \rangle^2 + \langle \hat{n} \rangle$$

$$\overline{n^2} = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 \bar{n}^n / (\bar{n} + 1)^{n+1} = (\bar{n} + 1)^{-1} x \frac{d}{dx} x \frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} x^n \Big|_{x=\bar{n}/(\bar{n}+1)}$$

$$\Delta n = \sqrt{\langle \hat{n}^2 \rangle - \langle \hat{n} \rangle^2} = \sqrt{\langle \hat{n} \rangle^2 + \langle \hat{n} \rangle}$$

Odziaływanie atomu z polem E-M

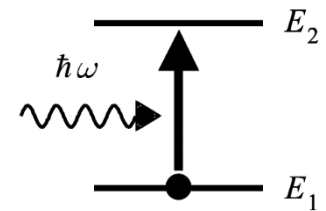
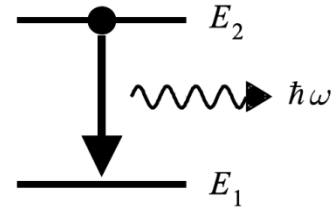
Współczynniki Einsteina

Emisja spontaniczna: $\frac{dN_2}{dt} = -A_{21}N_2$ $\tau = \frac{1}{A_{21}}$

$$N_2(t) = N_2(0) \exp(-A_{21}t) \equiv N_2(0) \exp(-t/\tau)$$

Absorpcja: $\frac{dN_1}{dt} = -B_{12}^\omega N_1 u(\omega)$

Emisja stymulowana: $\frac{dN_2}{dt} = -B_{21}^\omega N_2 u(\omega)$

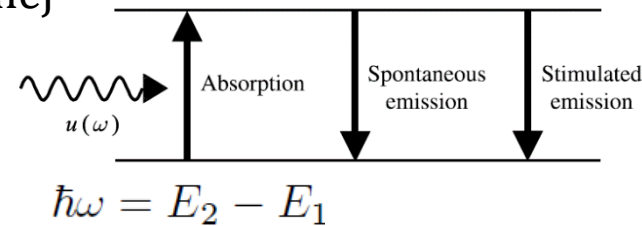


W stanie równowagi termodynamicznej

$$B_{12}^\omega N_1 u(\omega) = A_{21}N_2 + B_{21}^\omega N_2 u(\omega)$$

$$\frac{N_2}{N_1} = \frac{g_2}{g_1} \exp\left(-\frac{\hbar\omega}{k_B T}\right)$$

$$u(\omega) = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3} \frac{1}{\exp(\hbar\omega/k_B T) - 1}$$



$$g_1 B_{12}^\omega = g_2 B_{21}^\omega$$

$$A_{21} = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3} B_{21}^\omega$$

Odziaływanie atomu z polem E-M

Przybliżenie półklasyczne

$$\hat{H}\Psi = i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t}$$

$$\omega_0 = (E_2 - E_1)/\hbar \quad \omega = \omega_0 + \delta\omega, \quad \delta\omega \ll \omega_0$$

$$\hat{H} = \hat{H}_0(\mathbf{r}) + \hat{V}(t)$$

$$\hat{H}_0\Psi_i = i\hbar\frac{\partial\Psi_i}{\partial t}$$

Rozwiązanie układu
niezaburzonego

$$\Psi_i(\mathbf{r}, t) = \psi_i(\mathbf{r}) \exp(-iE_i t/\hbar) \quad \{i = 1, 2\}$$

$$\hat{H}_0(\mathbf{r})\psi_i(\mathbf{r}) = E_i \psi_i(\mathbf{r}) \quad \{i = 1, 2\}$$

$$\int \psi_i^* \psi_j d^3\mathbf{r} = \delta_{ij}$$

Ogólne rozwiązanie r-nia
Schroedingera zależnego
od czasu

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \sum_i c_i(t)\psi_i(\mathbf{r}) \exp(-iE_i t/\hbar)$$

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = c_1(t)\psi_1(\mathbf{r})e^{-iE_1 t/\hbar} + c_2(t)\psi_2(\mathbf{r})e^{-iE_2 t/\hbar}$$

Odziaływanie atomu z polem E-M

Przybliżenie półklasyczne

$$\begin{aligned} & (\hat{H}_0 + \hat{V}) \left(c_1 \psi_1 e^{-iE_1 t/\hbar} + c_2 \psi_2 e^{-iE_2 t/\hbar} \right) \\ &= i\hbar \left((\dot{c}_1 - iE_1 c_1/\hbar) \psi_1 e^{-iE_1 t/\hbar} + (\dot{c}_2 - iE_2 c_2/\hbar) \psi_2 e^{-iE_2 t/\hbar} \right) \end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned} & \hat{H}_0 \left(c_1 \psi_1 e^{-iE_1 t/\hbar} + c_2 \psi_2 e^{-iE_2 t/\hbar} \right) \\ &= \left(c_1 E_1 \psi_1 e^{-iE_1 t/\hbar} + c_2 E_2 \psi_2 e^{-iE_2 t/\hbar} \right) \end{aligned}$$

$$c_1 \hat{V} \psi_1 e^{-iE_1 t/\hbar} + c_2 \hat{V} \psi_2 e^{-iE_2 t/\hbar} = i\hbar \dot{c}_1 \psi_1 e^{-iE_1 t/\hbar} + i\hbar \dot{c}_2 \psi_2 e^{-iE_2 t/\hbar}$$

$$\dot{c}_1(t) = -\frac{i}{\hbar} \left(c_1(t) V_{11} + c_2(t) V_{12} e^{-i\omega_0 t} \right)$$

$$\dot{c}_2(t) = -\frac{i}{\hbar} \left(c_1(t) V_{21} e^{i\omega_0 t} + c_2(t) V_{22} \right)$$

$$V_{ij}(t) \equiv \langle i | \hat{V}(t) | j \rangle = \int \psi_i^* \hat{V}(t) \psi_j d^3 r$$

Odziaływanie atomu z polem E-M

Przybliżenie półklasyczne

Operator oddziaływania: $\hat{V}(t) = e\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\mathcal{E}}(t)$ \longrightarrow $\hat{V}(t) = ex\mathcal{E}_0 \cos \omega t$

Pole wzdłuż x: $\boldsymbol{\mathcal{E}}(t) = (\mathcal{E}_0, 0, 0) \cos \omega t$ $= \frac{ex\mathcal{E}_0}{2} (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t})$

$$V_{ij}(t) = \frac{e\mathcal{E}_0}{2} (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}) \int \psi_i^* x \psi_j d^3\mathbf{r}$$

Elementy macierzy
Przejścia dipolowego

$$\mu_{ij} = -e \int \psi_i^* x \psi_j d^3\mathbf{r} \equiv -e \langle i|x|j \rangle$$

$$V_{ij}(t) = -\frac{\mathcal{E}_0}{2} (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}) \mu_{ij}$$

$$\begin{aligned} \mu_{11} &= \mu_{22} = 0. \\ \mu_{21} &= \mu_{12} \\ \mu_{21} &= \mu_{12}^* \\ \Omega_R &= |\mu_{12}\mathcal{E}_0/\hbar| \end{aligned}$$

$$\dot{c}_1(t) = i \frac{\mathcal{E}_0 \mu_{12}}{2\hbar} \left(e^{i(\omega-\omega_0)t} + e^{-i(\omega+\omega_0)t} \right) c_2(t)$$

$$\dot{c}_2(t) = i \frac{\mathcal{E}_0 \mu_{12}}{2\hbar} \left(e^{-i(\omega-\omega_0)t} + e^{i(\omega+\omega_0)t} \right) c_1(t)$$

$$\dot{c}_1(t) = \frac{i}{2} \Omega_R \left(e^{i(\omega-\omega_0)t} + e^{-i(\omega+\omega_0)t} \right) c_2(t)$$

$$\dot{c}_2(t) = \frac{i}{2} \Omega_R \left(e^{-i(\omega-\omega_0)t} + e^{i(\omega+\omega_0)t} \right) c_1(t)$$

Odziaływanie atomu z polem E-M

Światło o małym natężeniu

Warunki początkowe: $c_1(0) = 1$ Zakładamy $c_1(t) \gg c_2(t)$ oraz $c_1(t) = 1$ dla wszystkich t
 $c_2(0) = 0$

$$\dot{c}_1(t) = 0$$

$$\dot{c}_2(t) = \frac{i}{2}\Omega_R \left(e^{-i(\omega-\omega_0)t} + e^{i(\omega+\omega_0)t} \right)$$

$$c_2(t) = \frac{i}{2}\Omega_R \left[\frac{e^{-i\delta\omega t} - 1}{-i\delta\omega} + \frac{e^{i(\omega+\omega_0)t} - 1}{i(\omega + \omega_0)} \right]$$

Przybliżenie wirującej fali (rotating wave approximation, RWA) $\delta\omega \ll (\omega + \omega_0)$

Współczynnik (absorpcji) Einsteina $B_{12}^\omega = \frac{d}{dt}(|c_2(t)|^2) = \text{const.}$

$$|c_2(t)|^2 = \left(\frac{\Omega_R}{2} \right)^2 \left(\frac{\sin \delta\omega t/2}{\delta\omega/2} \right)^2$$

Dla pola w rezonansie ($\delta\omega = 0$): $|c_2(t)|^2 = \left(\frac{\Omega_R}{2} \right)^2 t^2 \longleftarrow$ Niezgodne z doświadczeniem!

Odziaływanie atomu z polem E-M

Światło o małym natężeniu

$$|c_2(t)|^2 = \left(\frac{\Omega_R}{2}\right)^2 t^2 \longleftarrow \text{Niezgodne z doświadczeniem!}$$

Źródło szerokopasmowe, skończona szerokość widmowa przejścia

$$\frac{1}{2}\epsilon_0 \mathcal{E}_0^2 = \int u(\omega) d\omega$$

$$|c_2(t)|^2 = \frac{\mu_{12}^2}{2\epsilon_0 \hbar^2} \int_{\omega_0 - \Delta\omega/2}^{\omega_0 + \Delta\omega/2} u(\omega) \left(\frac{\sin(\omega - \omega_0)t/2}{(\omega - \omega_0)/2}\right)^2 d\omega$$

Zakładamy, że $u(\omega)$ nie zmienia się w obszarze całkowania oraz $\Delta\omega t \rightarrow \infty$

$$|c_2(t)|^2 = \frac{\pi}{\epsilon_0 \hbar^2} \mu_{12}^2 u(\omega_0) t$$

Dla N atomów losowa orientacja momentów dipolowych – uśrednić $(\mu_{12} \cos \theta)^2$

$$\langle \cos^2 \theta \rangle = 1/3$$

Współczynnik (absorpcji) Einsteina: $B_{12}^\omega = \frac{\pi}{3\epsilon_0 \hbar^2} \mu_{12}^2$